Leçon 205 Espaces complets. Exemples et applications

Soit (M, d) un espace métrique et $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé. (de même pour $(F, \|.\|_F)$) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Généralités sur les espaces complets

1) Suites de Cauchy, complétude

Déf 1 Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de (M, d) est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0$ tq $\forall n, p \geq N$ $d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$.

Prop 2 Toute suite de Cauchy est convergente.

Rmq 3 La réciproque est fausse, dans $(]0,1], d)$ la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_n = \frac{1}{n+1}$ est de Cauchy mais ne converge pas dans $(]0,1], d)$.

Déf 4 Si toute suite de Cauchy de (M, d) converge alors (M, d) est dit complet.

Rmq 5 La notion de complétude est une notion métrique et non topologique.

Exemple 6
$\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle est complet. En revanche $\mathbb{R}$ muni de la distance $d_e(x,y) = |e^x - e^y|$ n'est pas complet

Exemple 7 $(\mathbb{R}, |.|)$, $(\mathbb{C}, |.|)$, $(\mathbb{R}, d')$ (avec d' la distance définie ainsi $d'(x,y) = |x^3 - y^3|$) sont complets.

Prop 8 Si (M, d) est complet, soit $F \subset M$ muni de la distance induite par d sur F. F est complet si et seulement si F est fermé dans M.

Exemple 9 $(\mathbb{Z}, |.|)$ est complet

Prop 10 Tout espace métrique compact est complet.

Exemple 11 $([0,1], |.|)$ est complet.

Prop 12 Théorème des fermés emboîtés
Un espace métrique (M, d) est complet si et seulement si, pour toute suite décroissante de fermés non vides de E, telle que la suite $(\operatorname{diam}(F_n))_{n \geq 0}$ converge vers 0, l'intersection $\bigcap_{n \geq 0} F_n$ est un singleton.

Application 13 $(\mathbb{R}^*, |.|)$ n'est pas complet

Proposition 14 Si $(E, \|.\|_E)$ est un espace vectoriel complet et si $\|.\|$ est une norme équivalente à $\|.\|_E$, l'espace vectoriel $(E, \|.\|)$ est aussi complet.

Application 15 Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Théorème 16 $(E, \|.\|)$ est complet si et seulement si toute suite absolument convergente est convergente.

Application 17 $\exp : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ M \longmapsto \sum_{n \geq 0} \frac{M^n}{n!} \end{array}$ est correctement définie.

II. Fonctions et espace complets

1) espace de fonctions

Déf 18 On note $B(E,F)$ l'ensemble des applications bornées de E vers F et $\mathcal{C}_b(E,F) = \{ f \in B(E,F) \mid f$ continue $\}$. On munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Théorème 19 Si F est complet alors $(B(E,F), \|\cdot\|_\infty)$ est complet. $\mathcal{C}_b(E,F)$ est également complet.

Exemple 20 $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est complet

Exemple 21 $(Lip([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet

En revanche $(Lip([0,1]), N)$ est complet avec

$$N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{0 \leq x < y \leq 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}$$

Théorème 22 Théorème du point fixe de Banach-Picard

Soit (M, d) espace complet non vide et $f : E \to E$ une application strictement contractante (il existe $0<k<1$ tel que pour tout $(x,y) \in M^2$ $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y)$)

Alors f admet un unique point fixe.

Application 23 On obtient le théorème de Cauchy-Lipschitz grâce à ce théorème.

2) fonctions linéaires continues

Prop 24 Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet alors $(\mathcal{L}_c(E,F), |||\cdot|||)$ est complet.

Application 25

$(\mathcal{L}(E,\mathbb{R}), |||\cdot|||)$ est complet.

Lemme 26 (lemme de von Neumann)

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ espace vectoriel normé complet et $f \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $|||f||| < 1$ alors $Id_E - f$ est inversible dans $\mathcal{L}_c(E)$.

Déf 27 $GL_c(E) = \{ f \in \mathcal{L}_c(E) \mid f$ inversible $\}$

Prop 28 $GL_c(E)$ ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$.

3) Espaces L^p

On se placera sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert muni de la mesure de Lebesgue. On considéra des fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Déf 29

Si $1 \leq p < +\infty$ $\mathcal{L}^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid |f|^p$ intégrable sur $\Omega \}$.

$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f$ est essentiellement borné ie $\|f\|_\infty = \inf \{ C > 0 \mid \mu(\{\|f\| \geq C\}) = 0 \}$ est fini $\}$

On note $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega) /$ (être égale presque partout).

Notation 30

Soit $1 \leq p \leq +\infty$ l'exposant conjugué de p est p' avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (par convention $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Prop 31 " Inégalité d'Hölder

Soit $(f,g) \in L^p(\Omega) \times L^{p'}(\Omega)$ alors $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$

Prop 32 Inégalité de Minkowski

$\forall\, 1 \le p \le +\infty \quad \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

Théorème 33 (Théorème de Riesz-Fischer)

$(L^p, \|\cdot\|_p)$ est complet $\forall\, 1 \le p \le +\infty$. **DEV 1**

III. Applications, théorèmes sur la complétude

1) Prolongements

Théorème 34 Soit A une partie dense de $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ complet et $f : A \longrightarrow N$ uniformément continue alors il existe un unique prolongement uniformément continu de f à E.

Corollaire 35 Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet et G sous espace vectoriel dense de E et $f \in \mathcal{L}_c(G, F)$ alors f se prolonge de manière unique en une application continue de E dans F.

Application 36 On construit ainsi l'intégrale de Riemann pour les fonctions en escaliers.

2) Théorème de Baire et applications

Théorème 37 Soit $(E, \|\cdot\|)$ complet, soit $(O_n)_{n \ge 0}$ suite d'ouverts denses de E alors $\bigcap_{n \ge 0} O_n$ est encore dense dans E.

Application 38 $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

Théorème 39 (Théorème de la limite simple de Baire)

Soit (E, d) espace métrique complet, (F, δ) espace métrique $(f_n)_{n \ge 0}$ suite de fonctions continues $E \longrightarrow F$ qui converge simplement vers $f : E \to F$ alors f est continue sur un ensemble dense de E.

Application 40 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des points de continuité de f' est dense dans $\mathbb{R}$. $\boxed{-}$

DEV 2

Livres

- L'essentiel du programme de l'agrégation de mathématiques (Xavier Chauvet) (dév 2)
- 131 développements pour l'oral (dév 1)
- Gourdon